TITLE:

ON A RELATION BETWEEN SUMS OF ARITHMETICAL FUNCTIONS AND DIRICHLET SERIES (New Aspects of Analytic Number Theory)

AUTHOR(S):

石川, 秀明; 神谷, 諭一

CITATION:

石川, 秀明 ...[et al]. ON A RELATION BETWEEN SUMS OF ARITHMETICAL FUNCTIONS AND DIRICHLET SERIES (New Aspects of Analytic Number Theory). 数理解析研究所講究録 2009, 1639: 50-55

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140558

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1639 巻 2009 年 50-55

ON A RELATION BETWEEN SUMS OF ARITHMETICAL FUNCTIONS AND DIRICHLET SERIES

HIDEAKI ISHIKAWA AND YUICHI KAMIYA

1. 導入

数論的関数 $a(n)$ の平均

$$A(x)=\sum_{n\leq x}a(n)$$

の挙動とディリクレ級数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{s}}$$

の解析的性質が密接に関係していることはよく知られたことである。ここで、$a(n), s$ は複素数値をとり、$s=\sigma+it$ と表すことにする。

$F(s)$ が収束軸を超えて左側に解析接続可能なとき、それと同値な命題を $A(x)$ の観点から述べることはできるか?という素朴な問題設定をしてみる。ただし、解析接続可能のために必要最小限な条件を求めることを目標とする。

$a(n)=1$ for all n の場合 $F(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ で、収束軸、絶対収束軸ともに1である。この時、収束軸 $\sigma=1$ を超え左半平面に解析接続できて、$\mathbf{C}$ で有理型な関数となり、$s=1$ にのみ極(位数は1)をもつことが知られている。この解析接続の仕方は幾つかの証明方法があるが、以下にオイラーマックローリンを用いた証明を復習しておく。

M, N_1, N_2 は正の整数、 $f(x)$ は $[N_1,N_2]$ で定義された C^{M} 級の関数とする。このとき、

$$\begin{aligned}\sum_{N_1<n\leq N_2}f(n) &= \int_{N_1}^{N_2}f(x)dx-\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^{m}\left[f^{(m)}(x)\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\right]_{N_1}^{N_2}\\ &\quad -\frac{(-1)^{M}}{M!}\int_{N_1}^{N_2}f^{(M)}(x)B_{M}(x-[x])dx, \qquad (1)\end{aligned}$$

ここで記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表し、$[f(x)]_{N_1}^{N_2}$ は $f(N_2)-f(N_1)$ とする。また $B_m(x)$ は m 番目のベルヌーイ多項式である、例えば, $B_0(x)=1$, $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$, $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$, $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ である。上述した (1) がよく知られたオイラーマックローリンの和公

式と呼ばれるものである。(1) において $f(x)=x^{-s}$ としてみると次を得る：

$$
\begin{aligned}
\sum_{N_1<n\le N_2}\frac{1}{n^s}&=\int_{N_1}^{N_2}\frac{1}{x^s}dx-\sum_{m=1}^{M-1}\left[(s)_m\frac{1}{x^{s+m}}\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\right]_{N_1}^{N_2}\\
&\quad-\frac{(s)_M}{M!}\int_{N_1}^{N_2}\frac{1}{x^{s+M}}B_M(x-[x])dx, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ここで記号 $(s)_m$ は、

$$
(s)_m=\begin{cases} s(s+1)\dots(s+m-1) & \text{when} \quad m\in\mathbb{N}\\ 1 & \text{when} \quad m=0\end{cases}
$$

と定義する。今、$1<\sigma$ と仮定すると、$B_m(x)=O(1)$ であるので、$N_2\to\infty$ とすることが可能である。このことを用いて、$\zeta(s)$ の解析接続を実際にやってみよう。考えている s を $1<\Re s$ に固定しておき、級数を次のように切り分ける：

$$
\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N_1}\frac{1}{n^s}+\sum_{N_1<n}^{\infty}\frac{1}{n^s}.
$$

後者の和に先ほどのオイラーマックローリン和公式によって得られた式 (2) を $N_2\to\infty$ として代入すると

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{N1}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\frac{1}{N_1^{s-1}}+\sum_{m=0}^{M-1}(s)_m\frac{B_{m+1}}{(m+1)!N_1^{s+m}}\\
&\quad -\frac{(s)_M}{M!}\int_{N_1}^{\infty}\frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}}dx. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここまでは $1<\Re s$ で固定しての話であったが、改めて右辺を眺めてみる。この表示の最後の積分による項は $\sigma+M>1$ であれば

$$
\int_{N_1}^{\infty}\frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}}dx\ll\int_{N_1}^{\infty}\frac{1}{x^{\sigma+M}}dx\ll 1
$$

なので、広義一様収束している。よって $\sigma>1-M$ で正則。よって (3) の右辺の表示は $\zeta(s)$ が領域 $\sigma>-M+1$ まで解析接続できたことを意味する。 この M はいくらでも大きく設定できるので、$\zeta(s)$ は $\mathbf{C}$ まで解析接続できたといえる。

Remark 1. もし $-B_1(x-[x])$ のフーリエ展開

$$
-B_1(x-[x])=[x]-x+\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} \qquad (x\notin\mathbf{Z})
$$

を上述した議論の途中で用いるなら、解析接続だけでなく同時に $\zeta(s)$ の関数等式まで証明できてしまう。しかし我々の目標は、与えられたディリクレ級数 $F(s)$ が解析接続可能のための最小限の条件を見抜くこと、にある。とするならば、$-B_1(x-[x])$ のフーリエ展開は（関数等式まで引き出すほどの）強すぎる条件にみえる。

オイラーマックローリンの和公式を用いた $\zeta(s)$ の解析接続の議論では、$\{B_m(x-[x])\}_{m=1}^{\infty}$ の性質が大きく効いている。では、ベルヌーイ多項式達の何を使ったのだろうか？ 今一度証明を振り返ってみよう。(3) において M を大きくするということは部分積分の回数を増やすということである。一回部分積分をするごとに被積分関数の分母の多項式のべきが 1 づつあがる。それに対し $B_m(x-[x]) = O(1)$ for any m が効いて、M を一回増やすごとに解析接続の領域が左に幅 1 づつ広がっていくという状況である。つまり $\mathbf{C}$ まで解析接続できるために使われた事柄は、以下の二点である：

1. $\frac{d}{dx}B_{m+1}(x-[x]) = (m+1)B_m(x-[x])$ on $(0,\infty)$. ただし $m=1$ のきは x が自然数以外で成立.
2. $B_m(x-[x]) = O(1)$ on $(0,\infty)$ for any m.

2. 結果の紹介

オイラーマックローリン和公式を用いた $\zeta(s)$ の解析接続の議論で、$B_m(x-[x])$ が演じた本質的役割に注目する。その本質を抜き出し一般化した、good oscillating という概念を定義しよう。

Definition 1. 複素関数の列 $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ を考える。このとき各関数 $g_m(x)$ の定義域は $(0,\infty)$ とする。$g_0(x)$ は $(0,\infty)-\mathbf{N}$ で連続で、任意の有界開区間 $(0,L)$ においては有界。そして $m \geq 2$ の $g_m(x)$ は $(0,\infty)$ で微分可能で関係式 $\frac{d}{dx}g_m(x) = g_{m-1}(x)$ をみたす。$g_1(x)$ については $(0,\infty)-\mathbf{N}$ で微分可能で $\frac{d}{dx}g_1(x) = g_0(x)$ であればよいとする。

これらの条件を満たす関数列 $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ にさらに、以下に述べる数列 $\{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty}$ の存在を条件として付加する。各 $g_m(x)$ に評価式 $g_m(x) = O(x^{\alpha_m+\epsilon})$ as $x \to \infty$ が成り立ち（ここで ϵ は任意に小さい正の実数)、かつ $m+1-\alpha_m \to \infty$ as $m \to \infty$ が成立している。

以上の条件を満たす関数列を「*good oscillating* な関数列」と呼ぶことにする。また、$(0,\infty)-\mathbf{N}$ で連続で、任意の有界開区間 $(0,L)$ においては有界な関数 $g_0(x)$ を考えたとき、この $g_0(x)$ に対し *good oscillating* な関数列が存在する場合、「$g_0(x)$ は *good oscillating* な関数である」と呼ぶことにする。

Remark 2. ちなみに、この *good oscillating* は、我々が議論の便宜上勝手に定義し名前を付けた概念です。また、なぜ「良い振動」というネーミングにしたのかを丁寧に説明したいのですが、それはまた別の機会にしたいと思います。

例えば $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty} = \{-\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\}_{m=0}^{\infty}$ は good oscillating な関数列である（このとき α_m in Definition 1 は $\alpha_m = 0$ である)。よって $B_1(x-[x])$ は good oscillating な関数である。

それでは、以下に我々の得た結果を二つ紹介する。

Theorem 1. *Let* $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *be a complex sequence. Assume the following assumption* (X)*:*

(X) *There exist constants* $l \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, J_h, *and* J *such that the function* $g_0(x)$ *defined by*

$$g_0(x) = \sum_{n \le x} a(n) - \Big(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J \Big)$$

is of good oscillating.

Then the following assertion (Y) *holds:*

(Y) *There exists a constant* σ_1 *with* $\sigma_1 \ge 1$ *such that the Dirichlet series*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \tag{4}$$

associated with the sequence $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *is absolutely convergent for* $\sigma > \sigma_1$. *Moreover,* $F(s)$ *can be continued analytically over the whole s-plane beyond the line* $\sigma = \sigma_1$, *and its only singularity is a pole of the order at most* l *at* $s = 1$.

オイラーマックローリン和公式を用いた $\zeta(s)$ の解析接続の議論は、Theorem 1 の一例ととらえることができる。この場合 $a(n) \equiv 1$ である。条件 (X) において $l = 1$ $J_0 = 1$, $J = -\frac{1}{2}$ という選び方をしたとき、$g_0(x)$ は

$$g_0(x) = \sum_{n \le x} 1 - \Big(x - \frac{1}{2} \Big) = [x] - x + \frac{1}{2}.$$

となり、これは丁度 $-B_1(x - [x])$ である。ベルヌーイ多項式については知られた性質が多く、$-B_1(x - [x])$ が good ocsillating になっていることが確認できる。

次に、逆方向の議論をしたい。$F(s)$ にどのような解析的性質を仮定したら、(X) を導けるのだろうか？　(Y) のみでは、それは難しい。$|F(\sigma + it)|$ に関する何らかの評価が必要であろう。そこで得られたものが次の結果である：

Theorem 2. *Let us assume the assumption* (Y) *in Theorem 1 and, moreover, the following assumptions* (A1) *and* (A2)*:*

(A1) *For any non-negative integer* m, *there exists a non-negative constant* C_m *such that*

$$F(-m - \frac{1}{2} + it) = O((1 + |t|)^{C_m}). \tag{5}$$

(A2) *For the above sequence* $\{C_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{C_m}{m^2} = 0$$

holds.

Then the assertion (X) *in Theorem 1 holds.*

Theorem 2 によれば、条件 (Y)(A1)(A2) から (X) が導かれるのだが、実はこの $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ はより具体的に求めることもできる。その説明をしたいので、幾つかの関数を定義しておく。関数 $A_m(x):(0,\infty)\to\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, を次のように定義する：

$$A_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{n\le x}a(n)(x-n)^m, & \text{if } x\ge 1 \text{ and } m\in\mathbf{N},\\ \displaystyle\sum_{n\le x}a(n)-\widetilde{a}(x), & \text{if } x\ge 1 \text{ and } m=0,\\ 0, & \text{if } 0<x<1,\end{cases}$$

ここで $\widetilde{a}(x)$ は $\widetilde{a}(x)=\frac{a(x)}{2}$ if x is an integer, and $\widetilde{a}(x)=0$ otherwise とする。$A_m(x)$ は、いわゆる $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ のリース和である。また $SR_m(x):(0,\infty)\to\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ を

$$SR_m(x)=\sum_{j=-1}^{m}Res_{w=-j}F(w)\frac{x^{w+m}}{w(w+1)\dots(w+m)}. \tag{6}$$

で定義し、関数 $E_m(x):(0,\infty)\to\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ を

$$E_m(x)=A_m(x)-SR_m(x). \tag{7}$$

で定義する。

ここで話を本題に戻そう。Theorem 2 の (X) における $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ は $\{E_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ を選べることが証明できる。さらに、詳しく調べると、(X) における $\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ は $\{E_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ のみに一意に決定されてしまうことも証明できる。

3. 最後に

「$F(s)$ が関数等式をもつこと」と「$A_m(x)$ の誤差項 $E_m(x)$ がボロノーイ公式をもつこと」は同じ深さであることは古典的な理論として知られている。考えているディリクレ級数 $F(s)$ が関数等式をもてば、その $F(s)$ には美しい性質が期待できる。また、関数等式の存在により多くの手がかりが得られるため、$F(s)$ や $A_m(x)$ の詳細な研究が可能となる。

逆に、$F(s)$ に関数等式の存在が不明な場合、途端に $F(s)$ や $A_m(x)$ の研究が八方塞になったりする。また何か得られたとしても、不満足なものである場合が多い。実際これまでの研究のなかで関数等式を仮定しないディリクレ級数 $F(s)$ を扱うことが時折あった。そのたびに感じたのは、関数等式がないことから生じる不便さである。そして、そのたびに「関数等式がないという不便な状況を統一的に調べたい」とも思った。

我々はここ数年、以下のような問題設定を扱っている：

① $F(s)$ に少しの解析的性質のみ仮定（関数等式は仮定せず）した状況下で、$A_m(x)$ について何が言えるのか？

②その逆方向の命題はいえるのか？

③ $F(s)$ に少しの解析的性質のみ仮定（関数等式は仮定せず）した状況下で、$F(s)$ の他の性質をどれだけ引き出すことができるのか？

そのなかで得られた結果の幾つかを本稿で紹介しました。

REFERENCES

[1] T. M. Apostol, Introduction to analytic number theory, Springer-Verlag, UTM (1976).
[2] H. Ishikawa and Y. Kamiya, Spectral sets of certain functions associated with Dirichlet series, J. Math. Anal. Appl. **347** (2008), 204–223.
[3] H.Ishikawa and Y.Kamiya, On a relation between sums of arithmetical functions and Dirichlet series, in preparation.
[4] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-functio, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1986.

HACHINOHE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, HACHINOHE, AOMORI, 039-1192, JAPAN., 19-4 NISHINOBO DAIWA-CHO, OKAZAKI, AICHI, 444-0931, JAPAN.

E-mail address: ishikawa-g@hachinohe-ct.ac.jp, kamiya-9@m3.catvmics.ne.jp